Bakterienkultur*

Aufgabennummer: B_049

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

- Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.
- Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
- Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.
- Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat.

b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

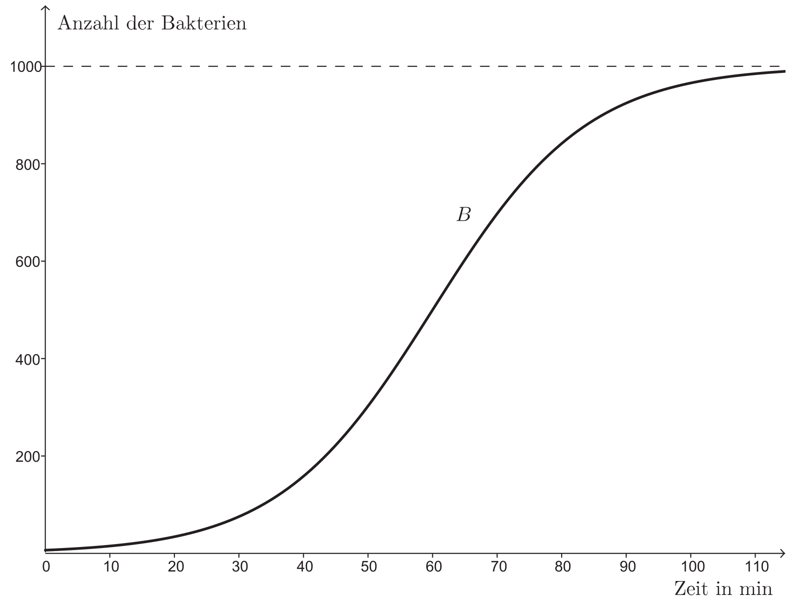
Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

- Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt.
- Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist.

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8{,}35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1\,000 - B) \quad \text{mit} \quad B > 0$$

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k \cdot N$

$\int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \int k\,\mathrm{d}t$

$\ln|N| = k \cdot t + c$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$N(0) = 50$ und $N(100) = 750$ liefert: $C = 50$ und $k = 0{,}0270...$

$N(180) = 6\,545{,}3... \approx 6\,545$

Nach 3 Stunden sind rund 6 545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

b) Ermittlung der exponentiellen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 69{,}43 \cdot e^{0{,}03065 \cdot t}$

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$f(t)$ ... Bakterienanzahl zur Zeit t

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Lösen der Gleichung $f(t) = 1\,000$ mittels Technologieeinsatz:
$t \approx 87{,}0$

Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1 000 Bakterien zu erwarten.

c) Ablesen der Wendestelle der Funktion B: $t = 60$ min
Toleranzbereich: [55; 65]
Rund 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung ist das Wachstum der Bakterienkultur am größten.

Für $B < 1\,000$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der Differenzialgleichung positiv, also $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$. Daher nimmt die Bakterienzahl für diese Werte zu.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B1: für die richtige allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Bakterienanzahl nach 3 Stunden
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Wachstumsverhaltens

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung, nach welcher Zeit 1 000 Bakterien zu erwarten sind

c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [55; 65]
1 × D: für eine richtige Argumentation anhand der Differenzialgleichung